

RAPPORT SUR LE MÉMOIRE DE THÈSE PRÉSENTÉ PAR MONSIEUR
ALEXANDRE BALDARE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Les travaux d'Alexandre Baldare s'inscrivent dans la théorie de l'indice des opérateurs différentiels. Le résultat fondateur est le théorème d'indice d'Atiyah-Singer qui établit l'égalité, pour un opérateur différentiel *elliptique* D sur une variété différentielle compacte V , entre l'indice *topologique* et l'indice *analytique*. Ensuite Atiyah et Segal se sont intéressés au cas d'un groupe de Lie compact agissant sur V par difféomorphismes et laissant D invariant, et ont formulé un résultat analogue dans la K-théorie G -équivariante.

Toutefois il est apparu assez rapidement que, lorsqu'on prend en compte une action G d'un groupe de Lie compact, il vaut mieux considérer les opérateurs différentiels G -invariants et *transversalement elliptiques*. M.F. Atiyah a établi un théorème dans lequel l'indice est interprété comme une distribution sur G , c'est à dire une forme linéaire continue sur $C^\infty(G)$. Ces résultats sont de nature K-théorique et il appartenait à Berline-Vergne d'en donner une interprétation cohomologique, inspiré du théorème de délocalisation de Bismut. Toutefois, les résultats de Berline-Vergne ne s'appliquent qu'à une classe restreinte d'opérateurs. Berline-Paradan ont finalement démontré les résultats cohomologiques de Berline-Vergne en toute généralité en utilisant la notion plus générale de cohomologie à valeur distributionnelle.

Parallèlement, les travaux de P. Julg ont permis d'appréhender ces questions dans le cadre de la K-théorie bivariante de Kasparov.

Dans cette thèse, Monsieur Baldare s'est intéressé à ces questions dans le cas important où l'on regarde une submersion $f : V \rightarrow W$ de variétés différentielles. C'est une question cruciale, car il arrive que l'on puisse factoriser la submersion triviale $p : V \rightarrow \{*\}$ à travers une submersion non triviale $f : V \rightarrow W$. Le cas des submersions conduit alors tout naturellement à s'intéresser à des familles d'opérateurs différentiels.

Cette thèse ambitionne de généraliser les résultats d'Atiyah-Segal, et de Berline, Vergne et Paradan au cas des familles d'opérateurs transversalement elliptiques associés à une submersion $f : V \rightarrow W$, équivariante par rapport à l'action par difféomorphismes d'un groupe de Lie compact G sur V et W .

Le principe directeur est la philosophie du théorème d'indice pour les familles d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques d'Atiyah-Singer : l'indice n'est plus vu comme scalaire mais comme élément d'un groupe de K-théorie ou de cohomologie de W .

Pour la partie K-théorique, la K-théorie bivariante se trouve être le cadre particulièrement approprié. La thèse définit l'indice d'une telle famille comme élément du groupe $KK_G(C^*(G), C(W))$, et établit des propriétés naturelles de cet indice. Cet indice

est en fait une application :

$$K_G(T^\vee V/W) \rightarrow KK_G(C^*(G), C(W))$$

où le groupe de gauche est le groupe de K-théorie équivariante des symboles transverses.

Puis en utilisant la cohomologie cyclique locale de Puschnigg, il montre que cet indice détermine une distribution sur $C^\infty(G)$ à valeurs dans le groupe de cohomologie de de Rham $H_{DR}(W)$, généralisant ainsi exactement le résultat fondamental d'Atiyah.

Dans les trois dernières parties, la thèse aborde les questions cohomologiques, et il est établi successivement une version « famille » du théorème de localisation de Bismut, des formules de Berline-Vergne-Paradan. L'auteur a naturellement recours à la cohomologie G -équivariante. L'indice topologique est alors une distribution sur G à valeurs dans $H_{DR}(B)$, et l'égalité des deux indices est prouvée.

Cette thèse volumineuse aborde avec efficacité un sujet complexe en utilisant des théories très élaborées (K-théorie bivariante, cohomologie cyclique, cohomologie G -équivariante ...).

Alexandre Baldare parvient avec succès au but recherché et montre sa maîtrise technique des outils utilisés. Il a fourni un travail important

La rédaction est claire et rigoureuse. Au surplus l'auteur n'a pas hésité à exposer et redémontrer un certain nombre des résultats qu'il utilise, ce qui rend la lecture de ce travail très autonome.

Les résultats obtenus sont prometteurs certainement d'autres développements.

En conclusion, c'est une très bonne thèse et je donne un avis très favorable pour la soutenance.

Fait à Paris, le 24 janvier 2018,



Michel Hilsum
 Directeur de Recherche
 UMR 7586 du CNRS (IMJ-PRG)

Rapport sur la Thèse
”Théorie de l’indice pour les familles d’opérateurs
 G -transversalement elliptiques”
de Alexandre Baldare:

La thèse de Alexandre Baldare traite de divers aspects de la théorie d’indice des opérateurs transversalement elliptiques sur des variétés compactes. Son objectif principal est la généralisation de nombreux théorèmes de l’indice, connus dans le cas d’un seul opérateur, au cas de familles continues d’opérateurs transversalement elliptiques. La thèse comprend quatre sections. Leur contenu est le suivant.

I) Reformulation de la théorie des opérateurs transversalement elliptiques sur une variété compacte, invariants sous une action d’un groupe de Lie compact G , dans le contexte de la K -théorie bivariante de Kasparov. Interprétation de leur indice distributionnel en termes du produit de Kasparov et sa généralisation aux familles d’opérateurs transversalement elliptiques sur une base compacte. Vérification de ses propriétés élémentaires (excision, multiplicativité, réduction aux indices ordinaires dans le cas des actions libres, induction).

II) Construction d’un indice cohomologique abstrait des familles d’opérateurs transversalement elliptiques à valeurs dans la cohomologie cyclique locale bivariante. Relation avec l’indice distributionnel d’Atiyah.

III) Révision des formules de localisation en K -théorie équivariante et en cohomologie (de de Rham) équivariante. Rappel du formalisme des superconnexions de Quillen. Généralisation de la formule de l’indice équivariant délocalisé de Berline-Vergne à valeurs en cohomologie équivariante au cas des familles.

IV) Généralisation de la formule de l’indice cohomologique délocalisé de Paradan-Vergne pour un opérateur transversalement elliptique au cas de familles continues de tels opérateurs. Equivalence entre l’indice de Paradan-Vergne généralisé et l’indice abstrait construit en II).

Alexandre Baldare utilise dans son travail un grand nombre de concepts et théories mathématiques sophistiqués. Son mémoire apporte une contribution intéressante à la théorie de l’indice qui clarifie les relations entre différentes approches (assez complémentaires) au problème de l’indice pour les opérateurs transversalement elliptiques. Il généralise avec succès les résultats connus pour un seul opérateur aux familles transversalement elliptiques. Son travail constitue une très bonne thèse.

Marseille, le 21.1.2018

Michael Buschigg